令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30　点

$\boxed{1}$

①カ　②コ　③キ　④イ　⑤ウ

$\boxed{2}$

（１）　取り出した１個の検体に病原菌 α が存在する事象を A，病原菌 α が存在しないと判定される事象を B とする。求める確率は，$P_{\overline{A}}(\overline{B})$ とかける。

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-P_{\overline{A}}(B)=1-\frac{95}{100}=\frac{1}{20}$$

10 点

（２）　求める確率は $P_B(A)$ である。

$$P_A(\overline{B})=\frac{9}{10}\,,\quad P_A(B)=\frac{1}{10}\,,\quad P_{\overline{A}}(B)=\frac{95}{100}=\frac{19}{20}\,,\quad P(A)=\frac{3}{10}$$

$$P(B)=P(A)\,P_A(B)+P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{19}{20}=\frac{139}{200}$$

よって，$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(A)\,P_A(B)}{P(B)}=\frac{3}{100}\div\frac{139}{200}=\frac{6}{139}$$

10 点

令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

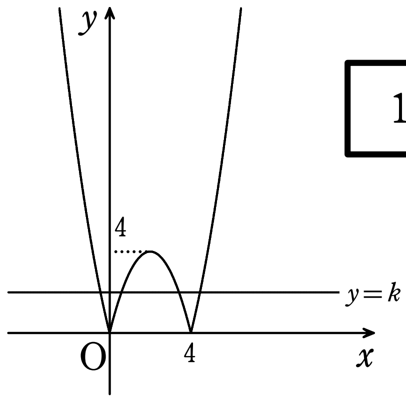
受験校種	高	教科科目	数学	受験番号		得点	30　点

3

（１）　方程式 $|x^2-4x|=k$ ・・・①　，$f(x)=|x^2-4x|$ とする。

方程式 ① の実数解の個数は $y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の個数に等しい。

$$f(x)=|x^2-4x|=|x(x-4)|=\begin{cases} x^2-4x \ (x\leqq 0\,,\, 4\leqq x) \\ -x^2+4x \ (0<x<4) \end{cases}$$



15 点

グラフは右図のようになるため，実数解の個数は

$k<0$ のとき　0 個

$k=0$，$k>4$ のとき　2 個

$k=4$ のとき　3 個

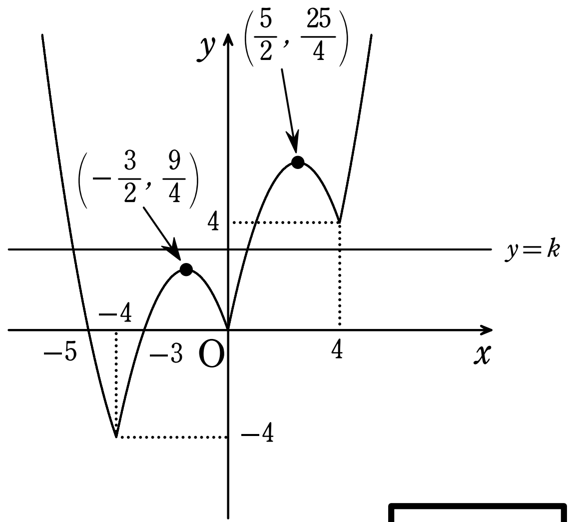
$0<k<4$ のとき　4 個

（２）　方程式 $|x^2-4|x||+x=k$ ・・・②　，$g(x)=|x^2-4|x||+x$ とする。

方程式 ② の実数解の個数は $y=g(x)$ と $y=k$ の共有点の個数に等しい。

$$g(x)=|x^2-4|x||+x=\begin{cases} x^2-3x \ (4<x) \\ -x^2+5x \ (0\leqq x\leqq 4) \\ -x^2-3x \ (-4<x<0) \\ x^2+5x \ (x\leqq -4) \end{cases}$$

グラフは右図のようになる。



したがって，異なる 2 個の実数解をもつとき，

$$-4<k<0\,,\quad \frac{9}{4}<k<4\,,\quad \frac{25}{4}<k$$

15 点

令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号		得点	40　点

4

（１）$\cos 4\alpha = \cos\frac{8}{9}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -\cos\frac{\pi}{9}$

$\cos 5\alpha = \cos\frac{10}{9}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{9}\right) = -\cos\frac{\pi}{9}$

ゆえに，　$\cos 4\alpha = \cos 5\alpha$

10 点

（２）$\cos 4\alpha = \cos(2\cdot 2\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1$

$= 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

10 点

（３）（１），（２）より，

$8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$

$16\cos^5\alpha - 8\cos^4\alpha - 20\cos^3\alpha + 8\cos^2\alpha + 5\cos\alpha - 1 = 0$

$(\cos\alpha - 1)(16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1) = 0$

$\alpha = \frac{2}{9}\pi$ だから，　$\cos\alpha \fallingdotseq 1$

ゆえに，$16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0$　よって，　$f(\cos\alpha) = 0$

10 点

（４）　$\alpha = \frac{4\pi}{9}$ のとき，$\cos 4\alpha = \cos\frac{16}{9}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9}$

$\cos 5\alpha = \cos\frac{20}{9}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9}$

$\alpha = \frac{6\pi}{9}$ のとき，$\cos 4\alpha = \cos\frac{24}{9}\pi = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\cos 5\alpha = \cos\frac{30}{9}\pi = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$

$\alpha = \frac{8\pi}{9}$ のとき，$\cos 4\alpha = \cos\frac{32}{9}\pi = \cos\left(4\pi - \frac{4\pi}{9}\right) = \cos\frac{4\pi}{9}$

$\cos 5\alpha = \cos\frac{40}{9}\pi = \cos\left(4\pi + \frac{4\pi}{9}\right) = \cos\frac{4\pi}{9}$

10 点

よって，$\alpha = \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ についても，$\cos 4\alpha = \cos 5\alpha$ が成立する。（１），（３）より

$16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha - 12\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0 \cdots ①$　の解であるので，

$16\left(\cos\alpha - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\alpha - \cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(\cos\alpha - \cos\frac{6\pi}{9}\right)\left(\cos\alpha - \cos\frac{8\pi}{9}\right) = 0 \cdots ②$

①，②の定数項を比較をすることにより，

$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{6\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9} = \frac{1}{16}$

令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号		得点	30　点

5

$\alpha=3-3i$，$\beta=3+\sqrt{3}-2i$，$\gamma=3+i$ とする。

$-\pi<\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\leqq\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3+i-(3-3i)}{3+\sqrt{3}-2i-(3-3i)}=\frac{4i}{\sqrt{3}+i}=\frac{4i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

10 点

よって，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから　　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$

6

（１）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -3,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ 0,\ 4)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 4)-(0,\ -3,\ 5)=(2,\ 3,\ -1)$

よって　t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ -3,\ 5)+t(2,\ 3,\ -1)=(2t,\ 3t-3,\ -t+5)$

10 点

ゆえに，点 P の座標は　　$(2t,\ 3t-3,\ -t+5)$

点 P が xy 平面上にあるとき　　$-t+5=0$　　すなわち　　$t=5$

よって，点 C の座標は　　$(10,\ 12,\ 0)$

（２）　（１）より，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(10-2t, 15-3t, t-5)$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(7-2t, 7-3t, t)$

$\angle\mathrm{CPD}=90^\circ$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=0$

10 点

$(10-2t)(7-2t)+(15-3t)(7-3t)+(t-5)t=0$

$14t^2-105t+175=0$

$2t^2-15t+25=0$

$(2t-5)(t-5)=0$

$t=5$ は C と一致するため不適。

よって，$t=\dfrac{5}{2}$ のとき，$\mathrm{P}\left(5, \dfrac{9}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

これは，C や D と異なるため適する。

令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30　点

7

（１）　$n=1$ のとき，

$4a_2S_1=S_2{}^2$

$4a_2a_1=(a_1+a_2)^2$

$4a_2=(1+a_2)^2$

$0=(1-a_2)^2$

$a_2=1$

$n=2$ のとき，

$4(a_2S_1+a_3S_2)=S_3{}^2$

$4(1+2a_3)=(2+a_3)^2$

$0=a_3{}^2-4a_3$

$0=a_3(a_3-4)$

$a_n>0$ より，$a_3\neq 0$ であるから

$a_3=4$

10 点

（２）　$4\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}S_k\right)=S_{n+1}{}^2$ …①　より，$4\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_{k+1}S_k\right)=S_{n+2}{}^2$ …②

②－①より，$4a_{n+2}S_{n+1}=S_{n+2}{}^2-S_{n+1}{}^2$

ここで，$a_{n+2}=S_{n+2}-S_{n+1}$ であるから，

$4(S_{n+2}-S_{n+1})S_{n+1}=(S_{n+2}-S_{n+1})(S_{n+2}+S_{n+1})$

$(S_{n+2}-S_{n+1})(S_{n+2}-3S_{n+1})=0$

$S_{n+2}\neq S_{n+1}$ であるから　$S_{n+2}=3S_{n+1}$

10 点

（３）　（２）より，$n\geqq 2$ において　$S_{n+1}=3S_n$

$S_2=2$ より，$n\geqq 2$ で　$S_n=2\cdot 3^{n-2}$

したがって，$n\geqq 3$ において $a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n-2}-2\cdot 3^{n-3}=4\cdot 3^{n-3}$

（１）と合わせて，　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=4\cdot 3^{n-3}\ (n\geqq 3)$

10 点

令和８年度　教科専門試験　高等学校（数学）解答例

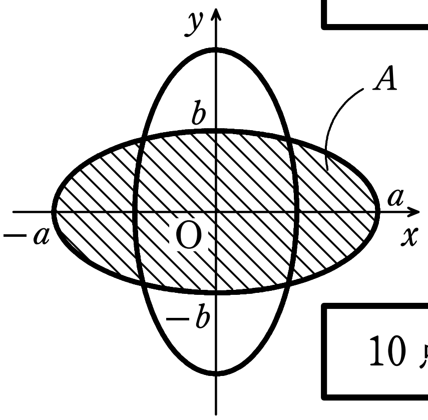
受験校種	高	教科科目	数学	受験番号		得点	40　点

8

（1）　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ から　　$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$y\geqq 0$ より　$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

10 点



（2）　領域 A は図の斜線部分で境界を含む。

この楕円は x 軸，y 軸に関して対称であるから，A の面積は

$$4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ の値は，半径 a の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ 倍と等しい。

よって，A の面積は　　$\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{1}{4}\pi a^2=\pi ab$

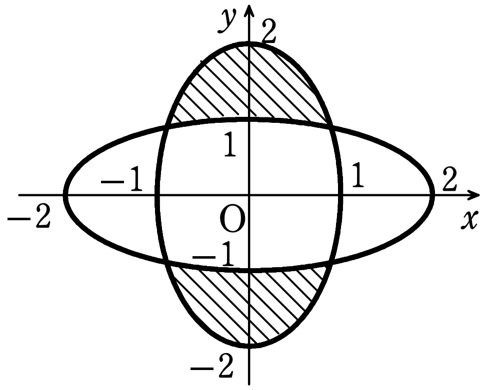
10 点

（3）　$a=2$，$b=1$ のとき楕円の方程式はそれぞれ，

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1\cdots①\quad ,\quad \frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\cdots②$$

よって，B に含まれて A に含まれない部分の領域 P は図の斜線部分。ただし，境界を含む。

①，②の $y\geqq 0$ の部分をそれぞれ y_1，y_2 とする。



$$y_1=\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+1}\qquad y_2=\sqrt{-4x^2+4}$$

また，2つの楕円の第１象限における交点は

$$\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+1}=\sqrt{-4x^2+4}\qquad x=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

領域 P は x 軸と y 軸に関して対象であるので

求める体積は領域 P の第１象限の部分を，x 軸に関して

回転させたものを2倍すればよい。

第１象限において，$y_2>y_1$ より

$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\pi({y_2}^2-{y_1}^2)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\left\{(-4x^2+4)-\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\right\}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\left(-\frac{15}{4}x^2+3\right)dx=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

20 点

ゆえに　　$V=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\pi$